サーベイ論文/Survey Paper

双対原理から双対技術へ

室田 一雄*

From Duality Principle to Duality Technology

Kazuo MUROTA*

Abstract– Duality plays a pivotal role in every field of science and engineering, but its concrete meaning is diverse. In search of duality-based technology duality concepts are classified and the role of duality in optimization and control is discussed. As fundamental duality phenomena in mathematics, emphasis is laid on the dual space in linear algebra and the Legendre transformation for convex functions. Duality between connotation and denotation is also explained. Two specific examples indicate recent fruitful interactions between different areas through duality.

Keywords– duality, optimization, control theory

1. はじめに

「双対性」は，数学，物理学は言うに及ばず，工学においても電気，機械，構造力学，制御，最適化など，多くの文脈に登場する．すぐに頭に浮かぶキーワードだけでも，点と線，論理積 (and) と論理和 (or), 積集合 (∩) と和集合 (∪), 直列と並列，群と指標，関数と測度，確率密度と特性関数，粒子と波，電気と磁気，電流と電圧，応力と歪，制御と観測，伝達関数と状態空間，極と零点，自己相関とパワースペクトル，最大化と最小化，フローとカットなどがある．このキーワードからも分かるように，双対性の内容は実は多岐に渡っており，双対性が何を意味するかについて明確な定義がある訳ではない．しかし，双対現象は面白く，双対定理は深遠である—と万人が感じている．双対性は「コト」の結晶である．

横幹連合においても「双対性」の重要性が認識され，第 1 回横幹連合コンファレンス (長野, 2005 年 11 月) において「知の統合セッション」の一つとして「双対性」が企画された．講演者（敬称略）と講演タイトルは次の通りであり，座長は筆者が務めた．

岡本和夫：数学の双対性
小島政和：多項式最適化問題と双対性
薩摩順吉：ソリトン理論における双対性
太田快人：制御における双対性
竹村彰通：統計科学における双対性

双対性への関心と期待は予想以上で，このセッションは立ち見がでる程の大盛況となり，活発な討論が行われた．後日，講演者と座長に「ベストセッション賞」が贈られた．

双対性を巡る知の統合とはいったい何を意味するのか，実は，まだ明確でない．本小論のタイトル「双対原理から双対技術へ」は，その方向性と意気込みを示しているに過ぎない．双対性の本質は何かというような哲学的な議論を深めるのみでなく，双対性のもたらす現世利益も求めたいということである．

双対性に着目することのご利益，および，横断型視点に立って双対性を理解することのご利益として，例えば，次のようなことがある．

1. 個別の分野における構造的理解が深まる．
2. 双対対象の利用により強力な手法が得られる．
3. 双対性を通じて異分野との交流が促進される．

横幹としては，最後のポイントが特に重要である．

横幹連合コンファレンスでの討論においても明らかになったことであるが,「双対性」の内容は実に多様であり，分野によってまちまちである．言葉としても似たような（あるいは，関係の深い）ものがいろいろある．例えば「相反性」,「共役性」,「随伴性」,「相補性」,「二重性」,「対称性」,「不変性」,「類似性」,「等価性」などである．

「双対性」のもつ多義性・多様性は，その豊かな可能性を示す一方で，分野横断的な交流に際しては無用の混乱を招く危険性をはらんでいる．我々の第一の課題は，それぞれの分野で双対性と呼んでいる事柄の意味合いを

* 東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻
〒113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1
* Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113-8656, Japan

Received: 11 December 2006, 27 January 2007

Table 1: Duality in electric networks [15]

枝	↔	枝
ループ	↔	カットセット
木	↔	補木
開放	↔	短絡
（グラフの）階数	↔	（グラフの）零度
直列	↔	並列
電流	↔	電圧
インピーダンス	↔	アドミッタンス
抵抗	↔	コンダクタンス
インダクタンス	↔	容量

整理することであろう．これについては，第 2 章で一般的な考察を行った後に，基本的な例として線形空間の双対性（第 3 章）とルジャンドル変換（第 4 章）を解説する．

数学的な原理としての「双対性」が理解されたとしても，それを工学的な技術として利用できるかどうかは別問題である．双対性の利用技術には分野によって大きな開きがあるが，最適化と制御における状況を第5章と第6 章で紹介する．第 7 章で，双対性による異分野間交流の具体例を記述する．

2. 双対性の諸相

双対性を広義に捉えて，その性格を幾つか挙げてみよう．互いに排他的な分類ではなく，重点の置き方がいろいろあるという程度のつもりである．

［理論構造の対称性］ 平面射影幾何学の公理は
・任意の二つの点は丁度一つの線の上にある
・任意の二つの線は丁度一つの点で交わる
という形をしており,「点」と「線」の入れ換えに関して不変である．したがって，平面射影幾何学の定理において「点」と「線」を入れ換えたものも正しい定理である．また，正しい論理式（恒等式）において論理和 $(\vee)$ と論理積 $(\wedge)$ を入れ換えたものは正しい論理式である．例えば

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$
$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

はどちらも正しい式である．理論体系のもつこのような対称性も双対性（あるいは双対原理）と呼ばれる．英語にすれば，duality of a theory となる [5]．また，よく知られている電気回路網における双対性 (**Table 1**) もこの類の双対性である．

［実体と特性］ 数学における双対性の基本パターンは，線形空間の双対空間の概念に見られる．線形空間 V の双対空間 V^* とは，V の上の線形関数の全体がつくる線形空間のことである（→第 3 章）.

双対性の第一のパターンとして，V とは別に定義された線形空間 W が，実は V の双対空間になっていること（記号では $W \simeq V^*$）を主張する形の双対性がある．例えば，$1 < p < \infty$ に対して p 乗可積分な関数の全体を L^p と表すとき，$q = p/(p-1)$ ならば L^q は L^p の双対空間となる．多様体の単体分割から定められるホモロジー群と微分形式から定められるド・ラーム・コホモロジー群の間の双対性（ド・ラームの定理）もこの種の双対性であり，多様体の幾何学的形状と多様体上の関数の関係を明らかにしている．

双対性の第二のパターンは，双対空間 V^* の双対 $(V^*)^*$ が元の空間 V と同型になる（$(V^*)^* \simeq V$）という形の主張である．双対性という観点からは，この方が重要である．群論における双対定理（可換群に対して指標群を考えるとき，指標群の指標群は元の群と同型というポントリァーギンの定理など [18, 19]）もこの種の双対性である．

線形空間の双対空間の考え方は次のように拡大解釈できる [17, 18]．V の元 $x_1, x_2, x_3, \ldots$ を実体と見るとき，V 上の関数である V^* の元 $f_1, f_2, f_3, \ldots$ は実体の特性（長さ，色，重さ，$\cdots$）と見なすことができる．$f_i(x_j)$ は，j 番目の実体の i 番目の特性の値を表していると同時に，i 番目の特性の j 番目の実体での値を表している．このように主客を反転してみると，特性 V^* が実体であり，実体 V がその特性であると思えてくる．このとき，任意の実体 $x \in V$ は特性の特性であるから，$V \subseteq (V^*)^*$ ということになる．一般には，特性の特性のなかに実体 x で表現できないものがあるかも知れないが，特性の特性が実体で尽くされるとき $V = (V^*)^*$ となる．このような実体と特性の相互性を $V \simeq (V^*)^*$ の形の双対性が表現している．

集合の表現法には大別して二つある．実体を列挙する「外延」と特性で記述する「内包」である．例えば,

$$\text{外延:}\ S = \{2,3,5,7\} = \{2\} \cup \{3\} \cup \{5\} \cup \{7\}$$
$$\text{内包:}\ S = \{x \mid x\ \text{は 1 桁の素数}\ \}$$
$$= \{x \mid x\ \text{は 1 桁の数}\ \} \cap \{x \mid x\ \text{は素数}\ \}$$

である．この言葉を使って上の解釈を言い直すと「外延と内包の双対性」ということになる．ルジャンドル変換についてもこのような見方が可能である（→第 4 章）.

［最大最小定理］ 最適化問題（最大化問題とする）に対して双対問題と呼ばれる別の問題（最小化問題）が定義され，両者の最適値が等しいという類の双対性がある．線形計画法の双対定理やネットワークフロー理論における最大フロー最小カット定理がその典型例である．数学的には凸関数のルジャンドル変換（第 4 章）に帰着されることが多い．最適化における双対性については第5章で扱う．

［相補的な表現］ 制御理論における伝達関数表現と状態空間表現（周波数と時間）のように，一つの実体を別の角度から表現するもので，dual view とでも呼ぶべきものである．これによって相補的な描像が得られる．量子力学における波動関数の座標表示と運動量表示もこの類であり，これによって物質のもつ粒子と波動の二重性（双対性）が見えてくる．また，確率分布を表す際の密度関数と特性関数の関係も同様であり，密度関数が頻度を表すのに対して特性関数はモーメント（平均や分散）を表現する．ここに挙げた三つの例は，数学的には殆ど同じでフーリエ変換（あるいはラプラス変換）である．

［アナロジー］ 横幹連合コンファレンスでの討論の際に「電気系と機械系の双対性」という言葉がでた．これに対し，それはむしろアナロジーあるいはパラレリズムというべきものであろうという意見がでて，大方の支持を得たようであった．双対性と意味合いが異なるとはいえ，アナロジー（類似，類推）は横断的視点の原点として，また「コトつくり」の原点として重要である．電気系と機械系は「モノ」としては全く別物であって，似ているのは「コト」の世界においてだからである．

以上，双対性のいくつかの側面を見てきたが，双対性についてはいろいろな文脈で議論されている [5, 6, 11, 13–18, 21, 22]. そもそも双対性とは何かについての一般的な定義は難しいが，高橋秀俊 [16] は「包含関係の逆転ということに関係した位数２の自己同型」を双対性の特徴づけとしている．議論の形式を整えるには，圏論の言葉（射，関手など）を使うのが便利である [17].

3. 双対線形空間

線形空間の双対空間の概念について，一通り述べよう．同型と標準同型の違いや有限次元と無限次元の状況の違いを再確認したい．

実数 $\mathbf{R}$ を係数体とする線形空間 V を考える．V 上の線形関数 $f: V \to \mathbf{R}$ の全体は，写像の和 $f+g$ とスカラー倍 af を普通に定義することによって線形空間をなす．これを V の双対空間とよび，V^* と表す．$x \in V$ と $f \in V^*$ に対して $\langle x, f\rangle = f(x)$ と定義し，ペアリング（または間積 [13]）と呼ぶ[1]．これは双線形写像である．

双対空間 V^* は線形空間であるから，その双対空間 $(V^*)^*$ を考えることができる．これを V^{**} と略記する．V の各元 x に対して，V^{**} の元 φ_x が

$$\varphi_x(f) = f(x) \qquad (\forall f \in V^*) \tag{1}$$

によって定義される．この対応 $\Phi: x \mapsto \varphi_x$ は V から V^{**} への単射（１対１の）線形写像である．このことは，実質的に $V \subseteq V^{**}$ と見なせることを意味している．

一般には Φ が全射になるとは限らないので V と V^{**} は同型とは限らないが，例えば V が有限次元空間の場合などには Φ が全射となり，V と V^{**} は同型（$V \simeq V^{**}$）である．これが線形空間の双対性の最も基本的な形である．

V がヒルベルト空間やバナッハ空間のような無限次元ノルム空間の場合には，V の上の線形関数で連続なものの全体を V^* として，上と同様の議論をする．V がヒルベルト空間ならば $V \simeq V^{**}$ であるが，バナッハ空間の場合にはこれが成り立つとは限らない．

実は，V が有限 $(=n)$ 次元空間とすると，双対空間 V^* も n 次元空間であり，したがって，V と V^* は同型である．同型写像 $\Psi: V \to V^*$ を作るには，V の基底 $(v_1, \ldots, v_n)$ と V^* の基底 $(f_1, \ldots, f_n)$ を任意に選んで $\Psi(v_i) = f_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ と定めてやればよい．V がヒルベルト空間の場合にも（リースの定理により）$V \simeq V^*$ が成り立つ．

上に登場した二つの同型写像 $\Phi: V \to V^{**}$ と $\Psi: V \to V^*$ には根源的な相違がある．前者が式 (1) によって（一意に）確定する「自然同型」であるのに対して，後者には基底の取り方に依存した任意性がある．すなわち，$V \simeq V^{**}$ においては V と V^{**} の要素ごとの対応があるが，$V \simeq V^*$ の方は，線形空間としての構造が同じであることだけを述べていて，要素ごとの対応は与えていない．

しかし，工学的な状況では，V に特別の基底が存在することの帰結として V と V^* の間に要素ごとの対応がつく場合がある．例えば，電気回路の枝電流の空間を V とすると，枝電圧の空間はその双対空間 V^* であり，両者の間には「同じ枝の電流と電圧」という関係によって要素ごとの対応がつく (**Table 1** 参照)．応力と歪でも同様である．

V の部分空間 U に対して，その零化空間 (annihilator) を

$$U^\circ = \{ f \in V^* \mid \langle x, f\rangle = 0 \ (\forall x \in U)\}$$

で定義する．このとき $(U^\circ)^\circ = U$ であり[2]，さらに「$U_1 \subseteq U_2 \Leftrightarrow U_1^\circ \supseteq U_2^\circ$」が成り立つ．包含関係の反転は，双対性一般に見られる特徴的な性質である．

4. ルジャンドル変換

ベクトル $x \in \mathbf{R}^n$ を変数とする関数 $f(x)$ に対して

$$f^*(p) = \max\{\langle x, p\rangle - f(x) \mid x \in \mathbf{R}^n\} \tag{2}$$

（ただし $p \in \mathbf{R}^n$）で定義される変換 $f \mapsto f^*$ をルジャンドル変換[3]といい，f^* を f の共役関数と呼ぶ．ここで，

1. 「間積」という用語は広く使われてはいないが,「内積」との対比において，よい言葉のように思う．間積は V の元と V^* の元の積であり，内積は V の二つの元の積である．

2. 無限次元空間では，U に付帯条件が必要である．
3. ルジャンドル–フェンシェル変換ともいう．変分法におけるフリードリックス変換 [2, 20] もルジャンドル変換である．

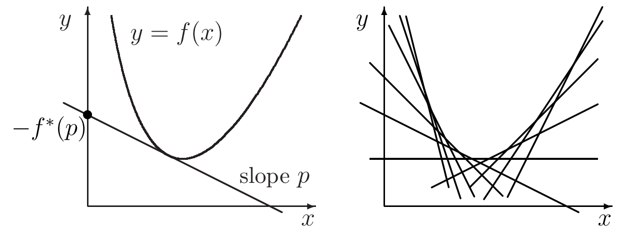

Fig. 1: Legendre transformation $f \mapsto f^* \mapsto (f^*)^* = f$

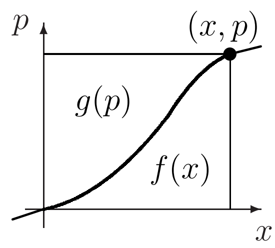

Fig. 2: Conjugacy relationship $f \leftrightarrow g$

$\langle x, p\rangle = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ はペアリングである．

任意の関数 f に対して，f^* は凸関数であり，さらに f が（ある付帯条件を満たす）凸関数ならば

$$(f^*)^* = f \tag{3}$$

が成り立つ．これが，凸関数や凸集合に関する双対性の源である．

Fig. 1 の左側に示すように，$n = 1$ の場合には，式 (2) の変換は図形的にも理解できて，$y = f(x)$ のグラフの接線で傾きが p のものの y 切片が $-f^*(p)$ に等しい．式 (3) の双対性は，グラフの接線をすべて集めれば元のグラフを復元できること（**Fig. 1** 右）に対応している（→補足 2）．

微分可能な二つの凸関数 f と g が共役関係にあれば，「$p = \nabla f(x) \Leftrightarrow x = \nabla g(p)$」が成り立つ．$n = 1$ の場合にこの関係を図示すると **Fig. 2** のようになる．太い曲線の下の面積が $f(x)$, 上の面積が $g(p)$ であり，曲線自身の方程式は $p = f'(x)$（あるいは $x = g'(p)$）である．したがって,「共役関係とは，逆関数関係の積分形表現である」と言える．このことからも，式 (3) の関係が納得される．

ルジャンドル変換は離散的な凸関数に対しても定義され,「M 凸関数」,「L 凸関数」と呼ばれる関数クラスの間の１対１対応（共役関係）を与える．線形独立性の二つの表現法である「基底の列挙」と「階数関数」の双対性は，この離散ルジャンドル変換として理解される [12].

補足 1: 物理的な系の平衡状態は，何らかの意味のエネルギー関数 $f(x)$ を（適当な制約下で）最小化する状態として特徴付けられることが多い（変分原理）．このとき，$f(x)$ のルジャンドル変換 $g(p)$ は補エネルギーと呼ばれ，その最小化によって平衡状態を特徴づけることもできる．変数 p は，x との積がエネルギーになるような量を表しており，例えば，x が変位なら p は力である．

補足 2: 「外延と内包の双対性」ということを第 2 章で述べた．関数 f を値の集合 $\{f(x) \mid x \in \mathbf{R}\}$ と見るのは外延である．これに対して,「傾き p の直線 $y = px + c$ の切片 c が $c_p = -f^*(p)$ 以下ならば $y = f(x)$ のグラフの方が上にある」は f の特性であり，すべての p に対してこれが成り立つことで f を規定するのは内包である．つまり，**Fig. 1** の左が外延，右が内包であり，双対性 $(f^*)^* = f$ はこの二つの記述法が等価になることを述べている．

5．最適化における双対性

最適化理論 ([3, 9, 10, 12]) における双対性の基本形は，与えられた最適化問題（最小化問題）に対して双対問題と呼ばれる別の最適化問題（最大化問題）が定義され，元の問題が凸性をもてば両者の最適値が等しくなるという形の最大最小定理である．その例としてフェンシェル双対定理を紹介した後に，最適化の分野で双対性がどのように利用されるかを概観する．

5.1 フェンシェル双対性

f を n 変数関数，g を m 変数関数，A を $m \times n$ 行列とし，f, g の共役関数（式 (2) 参照）を f^*, g^* とすると，任意の $x \in \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m$ に対して

$$f(x) + g(Ax) \geq -f^*(A^{\mathrm{T}}y) - g^*(-y) \tag{4}$$

が成り立つ（これを弱双対性と呼ぶ）．ここで，左辺を最小化する問題と，右辺を最大化する問題を考えるとき，f と g が凸関数（で適当な付帯条件を満たす）ならば，その最小値と最大値は一致する．式で書けば

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} [f(x) + g(Ax)] = \max_{y \in \mathbf{R}^m} [-f^*(A^{\mathrm{T}}y) - g^*(-y)] \tag{5}$$

である．これをフェンシェル双対定理という．

線形計画法の双対性もこれの特殊ケースで，例えば

最小化	$c^{\mathrm{T}}x$	最大化	$b^{\mathrm{T}}y$
制約条件	$Ax \geq b$	制約条件	$A^{\mathrm{T}}y = c,\ y \geq \mathbf{0}$

の間の双対性は，式 (5) において

$$f(x) = c^{\mathrm{T}}x, \qquad g(z) = \begin{cases} 0 & (z \geq b), \\ +\infty & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおくことにより導出される．

最適化理論には，この他にもラグランジュ双対などの双対定理がある．変分法の相反定理 [2, 20] も（汎関数版の）フェンシェル双対定理として理解できる．

5.2 双対性の役割

例えば，解くべき最適化問題が $\Phi(x) = f(x) + g(Ax)$ を最小化する問題として記述されたとする．このとき $\Psi(y) = -f^{*}(A^{\mathrm{T}}y) - g^{*}(-y)$ を最大化する問題を双対問題 (dual problem) といい，元の問題を主問題 (primal problem) と呼ぶ．双対性は，以下のように利用される．

［下界値］ 任意の x に対して $\Phi(x)$ を計算すれば最適値 $\min\Phi$ の上界が得られる．任意の y に対して $\Psi(y)$ を計算すれば，弱双対性 (4) により，$\min\Phi$ の下界が得られる．

［最適性の確認］ ある x が最適解かどうかを知りたいとする．適当な y に対して $\Psi(y)$ を計算して $\Phi(x) = \Psi(y)$ となっていれば，弱双対性 (4) により $\Phi(x) = \min\Phi$（かつ $\Psi(y) = \max\Psi$）と断定することができる．

［解法の設計］ 主問題を解く際に，主変数 x だけでなく双対変数 y を保持し，$\Delta(x,y) = \Phi(x) - \Psi(y)$ が減少するように x と y を更新していく．双対性 (5) により $\Delta(x,y) \to 0$ となる (x,y) の列が存在し，$\Delta(x,y) = 0$ になれば最適解である．この種の解法を主双対法と呼ぶ．

［問題の分解］ y が双対問題の最適解ならば，$f(x) + g(Ax)$ の最小化問題は，$f(x) - \langle x, A^{\mathrm{T}}y\rangle$ の最小化と $g(Ay) + \langle Ax, y\rangle$ の最小化という二つの独立な問題に分解される．これにより最適解全体の構造が明らかになる．

［感度解析］ 双対変数を利用することにより，最適化問題のパラメータ（例えば線形計画における b や c）を変化させたときの最適値 $\min\Phi$ の変化を解析できる．

［理論構築の指導原理］ 双対性は，最適化の理論を作る際の指導原理である．拡張ラグランジュ関数 (1970 年代) や多項式最適化問題の 2 乗和緩和や半正定値緩和 (2000 年以降) などは，非凸最適化問題に対する双対性の枠組みと位置づけられる．離散凸解析 [12] は離散双対性を軸とした離散最適化の理論である．

6. 制御における双対性

制御理論においては，性格の異なる二つの双対性が大きな役割を果たしている．その第一は周波数領域と時間領域におけるシステム表現の相補性であり，第二は制御と観測の双対性である．

6.1 状態方程式と伝達関数

線形時不変ダイナミカルシステムの表現法には，時間領域における状態方程式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + Bu, \quad y = Cx \tag{6}$$

と周波数領域における伝達関数 $G(s)$ の二つがある．伝達関数は内部状態 x に言及することなく，入力 u と出力 y の関係をラプラス変換の世界で表現したものである．状態方程式から伝達関数に移るには $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ とすればよいが，逆に，伝達関数から状態方程式を作る方法も分かっている．

歴史的に見ると，制御理論は，この二つの表現法の利点を交互に利用することで発展してきたといえる [4].

1960 年以前のいわゆる古典制御の主役は伝達関数であった．伝達関数表現の利点は，周波数を基本とする現象理解の自然さに加え，複素関数論という数学的道具との相性のよさである．システムの安定性が伝達関数の右半平面での正則性に対応し，受動性が正実性と対応することなどを通じて，物理的に実現可能なシステムの性質や限界が複素関数論の定理によって明らかにされてきた．

1960 年代にカルマンの構築した現代制御理論の主役は状態空間表現である．これは，多入力多出力系の取り扱いやシステム構造の解析を可能にした．行列による記述はシステム設計の際の計算にも適している．

1980 年以後の H^{∞} 制御 [8] においても，二つの表現の相補性が顕著に見られる．当初，伝達関数表現が先行し，複素関数論の高級な定理を利用する形の理論展開がなされたが，最終的にはリッカチ方程式という形の状態空間表現に翻訳された．これによって，理論のソフトウェア化が可能となり，H^{∞} 制御が広く普及することとなった．

制御理論において相補的表現という形の双対性が果たした役割をより詳細に検討することは，知の統合にとって有効であると思われる．

6.2 制御と観測

状態方程式 (6) で記述されるシステムが可制御であるための必要十分条件は，x の次元を n として

$$\mathrm{rank}\,[B \mid AB \mid A^2B \mid \cdots \mid A^{n-1}B] = n$$

で与えられ，可観測であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\,[C^{\mathrm{T}} \mid A^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} \mid (A^{\mathrm{T}})^2C^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid (A^{\mathrm{T}})^{n-1}C^{\mathrm{T}}] = n$$

で与えられる．また，LQG 理論における最適レギュレータは，リッカチ方程式

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + C^{\mathrm{T}}QC = O$$

を満たす対称行列 P から定められ，最適フィルタは

$$PA^{\mathrm{T}} + AP - PC^{\mathrm{T}}R^{-1}CP + BQB^{\mathrm{T}} = O$$

から定められる．ここで，Q, R はそれぞれの問題の定式化に用いられる対称行列である．

このように，制御理論においては，制御と観測に関して別々に定義された問題の答えが，$A \leftrightarrow A^{\mathrm{T}}$, $B \leftrightarrow C^{\mathrm{T}}$, $C \leftrightarrow B^{\mathrm{T}}$ という形の対応関係を示すことが多い．これを制御と観測の双対性と呼ぶ．

式 (6) のシステムに対して，双対システムを

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -A^{\mathrm{T}}z - C^{\mathrm{T}}v, \quad w = B^{\mathrm{T}}z \tag{7}$$

で定義すると，制御と観測の双対性は「(6) と (7) では制御と観測が入れ換わる」と言い換えられる．双対システムには時間反転が含まれており，自励系（$B = O, C = O$）の場合には，微分方程式論における随伴システムになる．

制御と観測の双対性により，制御理論はあたかもフランス式庭園のような形式美を有する結果になっているわけであるが，双対性の本質については専門家も結論に至っていないようである．例えば，木村 [8, p. 33] には次のような記述がある：「可制御性と可観測性という一見なんの関係もない二つの概念が，たがいに双対の関係にあるというのは不思議なことである．カルマン自身もこの双対性の起源についてかなり考えを凝らした形跡があり，可制御性はエネルギーにかかわり可観測性は情報にかかわるという着想から，“On the Duality between Energy and Information” と題した論文を予告したこともあった．結局その論文は発表されなかったが，線形システムにおいて制御と観測にまつわる概念の間にこのように見事な双対性が成り立つ根拠は，いまだに謎である．」

7. 双対性の生みだす新たな知見

7.1 最適化と制御の再会

最適化と制御は，元来，非常に近い関係にあり，1950 年代のポントリャーギンの最適制御の時代には変分法を基礎として両者は同義語であった感がある．しかし，ダンツィックの線形計画法 (1947 年) 以後の最適化理論とカルマン以後の制御理論とは基本的に別の道を歩んできた．

最近，最適化の分野における半正定値計画法の双対性を用いて，制御理論における数学的な道具立てを整理する動きが見られる．半正定値計画というのは，対称行列の正定値性を制約条件に含む凸最適化問題であり，その双対定理から正定値対称行列の種々の数学的な性質を統一的に導出できる．例えば，Balakrishnan–Vandenberghe [1] は，制御理論の標準的な道具であるリャプノフ不等式やリッカチ不等式の可解条件や KYP(Kalman–Yakubovich–Popov) 補題を，正定値行列に関する二者択一定理（式 (3) の双対性の特別な場合）から導出している．また，周波数領域と時間領域における H^∞ ノルムの二つの表現式

$$||G(s)||_\infty = \sup_{\omega\in\mathbf{R}} \sigma_{\max}(G(j\omega)) = \sup_{u}\{\|y\|_2 \mid \|u\|_2 \le 1\}$$

が，半正定値計画の主問題と双対問題の間の双対性として理解できることを指摘している．この見方は二種類の双対性の相互干渉という点からも大変興味深い．

7.2 構造物のエネルギー原理

工学の問題を最適化問題にうまく定式化すると，その双対問題が定義され，それを工学的に解釈することによって当該分野における新たな知見が得られることがある．応用力学における最近の例を示そう．

ケーブルネットや膜など，剛性に不連続性を有する材料で構成された構造物は，荷重に応じて，しわやたるみなどの特徴的な応力状態を示す．寒野・大崎 [7] は，最適化理論における近年の成果である「対称錐上の凸計画問題」に関する双対性理論を利用して，この種の構造物に対する大変形理論の枠組みと実用的な数値解法を提案している．とくに，構造物のエネルギー原理を対称錐上の凸計画問題として定式化すれば，その双対問題が応力だけを変数とする新たな補エネルギー原理を与えることを示した．これにより新しい解析法としての応力法と，それに基づく設計法が得られる．

8. おわりに

「実体と特性の双対性」あるいは「外延と内包の双対性」という見方を第 2 章で述べた．ここで思い切って

実体・外延 → モノ,　　特性・内包 → コト

と置き換えてしまえば「モノとコトの双対性」ということになる.「モノ」と「コト」との関係性をこのような視点から考えてみることは一つの可能性として面白いかもしれない．その際のポイントは，意味のあるペアリング（間積）が定義できるかどうかである．

謝辞: 東京大学の原辰次教授には，制御理論に関してご教示頂くとともに，全般的な事柄についてもご助言を賜った．ここに謝意を表する．本研究は科学研究費補助金の援助を受けた．

参考文献

[1] V. Balakrishnan and L. Vandenberghe: “Semidefinite programming duality and linear time-invariant systems,” IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.48, pp. 30-41, 2003.

[2] R. クーラン, D. ヒルベルト（斎藤利弥監訳，丸山滋弥訳）: 数理物理学の方法 1，東京図書，1959.

[3] 福島雅夫: 非線形最適化の基礎，朝倉書店，2001.

[4] 原辰次: ロバスト制御の回顧と展望，計測と制御，Vol.40, pp. 63-69, 2001.

[5] M. Iri: “Metatheoretical considerations on duality,” RAAG Research Notes (工学諸問題の双対性に関するメタ理論的考察), Third Series, No.124, 1968.

[6] M. Iri and A. Recski: “What does duality really mean?” Circuit Theory and Applications, Vol.8, pp. 317-324, 1980.

[7] Y. Kanno and M. Ohsaki: “Minimum principle of complementary energy for nonlinear elastic cable networks with geometrical nonlinearities,” Journal of Optimization Theory and Applications, Vol.126, pp. 617-641, 2005.

[8] 木村英紀: H^∞ 制御，コロナ社，2000.
[9] 小島，土谷，水野，矢部: 内点法，朝倉書店，2001.
[10] 今野，山下: 非線形計画法，日科技連出版社，1978.
[11] 森口繁一 編: 双対定理，日科技連数学計画シンポジウム報文シリーズ, No.6, 日本科学技術連盟, 1963.
[12] 室田一雄: 離散凸解析，共立出版，2001.
[13] 高橋利衛: 基礎工学セミナー（量の理論／現象と論理と法則の構造をめぐる討論），現代数学社，1974.
[14] 高橋秀俊: 双対と類推，共立出版, 1960.
[15] 高橋秀俊: 線形集中定数系論 I〜IV，岩波講座，基礎工学 6，岩波書店，1969〜1970.
[16] 高橋秀俊: 数理と現象，岩波書店，1975.
[17] 谷村省吾: 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何－双対性の視点から，サイエンス社，2006.
[18] 淡中忠郎: 双対原理，岩波書店，1951.
[19] 辰馬伸彦: 位相群の双対定理，紀伊國屋書店，1994.
[20] 寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論（応用編），岩波書店，1960.
[21] 数学のたのしみ，No.10,「フォーラム：双対性をさがす」，日本評論社，1998.
[22] 数理科学，No.440 (特集/双対性)，サイエンス社，2000.

室田 一雄

1980 年 東京大学大学院 工学系研究科 計数工学専攻修士課程修了．同年 東京大学 工学部 助手．現在，東京大学大学院 情報理工学系研究科 教授．数理工学の研究と教育に従事．工学博士および博士 (理学)．Discrete Convex Analysis, SIAM (2003); 離散凸解析，共立 (2001); Matrices and Matroids for Systems Analysis, Springer (2000); 数値計算法の数理，岩波 (1994)[共著] などの著書がある．