

ETAS モデル：クラスター性を表すための点過程モデル

岩田 貴樹（県立広島大学）

The Epidemic-Type Aftershock Sequence (ETAS) model: a point-process model for representing a cluster process

*Takaki Iwata (Prefectural University of Hiroshima)

Abstract— The Epidemic-Type Aftershock Sequence (ETAS) model proposed by Prof. Ogata is a point-process model representing a temporal or spatio-temporal pattern of earthquake occurrence. This model is widely recognized and applied in various scientific fields, such as medical science, social science, economics, and ecology, in addition to earth science. Forecasting systems for future earthquakes and crimes based on this model have been implemented and used in Japan, the United States, and Europe. Following the progress of point-process studies, particularly for a spatio-temporal point pattern, the ETAS model will be more widely used, and the forecasting through this model will impact our society.

Index terms— Epidemic-Type Aftershock Sequence (ETAS) model, point-process, spatio-temporal analysis

1 推薦対象および推薦理由の概要

本稿では「Epidemic-Type Aftershock Sequence (ETAS) モデル」をコトづくりコレクションに推薦し、その理由などについて示す。

点過程解析は時間 / 空間 / 時空間においてランダムに生起する「点」の発生パターンを調べるための統計的手法であり、様々なデータ解析に適用されている。この解析においては「強度関数」と呼ばれる、「点」の密度分布を表す式（モデル）の設定が重要となる。ETAS モデルは、1980 年代末に地震の時間発生パターンを表すために提案された強度関数である。その後、時空間への拡張が行われ、時期をほぼ同じくして時空間に対する点過程解析が盛んになったこともあり、ETAS モデルは地球科学以外の分野でも広く認識されるようになった。また、元々の適用事例である地震に対しては、時間・時空間に対する双方とも地震活動の標準的モデルとして国際的に受け入れられ、地震活動解析・予測に国内外で広く用いられている。

ETAS モデルは点過程解析、中でも「Hawkes 過程」と呼ばれるクラスター（集中）性のある点過程の扱いに大きな役割を果たしている。現在では医学・社会科学・経済学・生態学など様々な分野における適用事例があり、広い分野への高い影響力がある。またこのモデルに基づく地震や犯罪の発生予測は社会的な意義も高い。これらのことから ETAS モデルはコトづくりコレクションにふさわしいものとする。

2 ETAS モデル

2.1 点過程解析

ETAS モデルについて解説する前に、その理解に必要な点過程解析に関する基本的な説明を行う。より詳細かつ厳密な内容については適当な教科書^{1, 2)}を参照されたい。

「点過程」とはある次元（典型的には時間 1 次元、空間 2 次元あるいは 3 次元など）内にランダムに発生する「点」と見做し得る事象の集合である。一例としては、ある店に客が訪れた時刻の記録歴が挙げられる。この例の場合、客が訪れた時刻は「瞬間」であるため、時間軸上における「点」として表すことができる。

点過程を扱う上で重要となるものは「強度関数（点

過程モデル）」 $\lambda(x|\theta)$ の設定である。これは解析対象とする空間内の位置 x において期待される点の密度に相当する。また通常は何らかの（未知）パラメータ θ を含む式（関数）として与えられる。

実際の点過程データを解析する際には、これまでの知見などに基づき適当な強度関数を設定しておき、データ $\{x_i; i = 1, 2, \dots, N\}$ に合うようなパラメータ θ を求めることが行われる。点過程に対する対数尤度関数（データとモデルの合い具合を統計的に評価する適合関数）は

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^N \ln \lambda(x_i|\theta) - \int_S \lambda(x|\theta) dx \quad (1)$$

であることが知られている。ここで S は解析領域を表す。この対数尤度関数を最大化することで（最尤法）「最もよいパラメータ」 $\theta = \hat{\theta}$ を得ることが出来る。

こういった解析による現実的な応用例の 1 つとして将来の事象発生予測がある。上述の通り強度関数は期待される密度であるため、これを適当な領域で積分すれば、その領域で生じる点の発生個数の期待値が得られる。よって、現在までのデータを用いて最尤法により $\hat{\theta}$ を求めておき、これを強度関数に代入した $\lambda(x|\hat{\theta})$ を現在から未来の適当な時刻まで積分すれば、その未来時刻までに期待される事象の発生個数が得られる。さらに期待発生個数に基づいた確率的な予測も行われる。

2.2 ETAS モデルの強度関数

ETAS モデルは地震、特に余震の時間あるいは時空間発生パターンを表すことを目的としたものである。これにより地震活動解析の深化と地震活動予測の現実化が達成されたと考えられる。

具体的には ETAS モデルは前節において説明した点過程解析における強度関数であり、1988 年に尾形が提案した地震発生の時間発展（「時間版 ETAS」）³⁾ に対するものは以下の通りである。

$$\lambda(t|\theta) = \mu + \sum_{i:t_i < t} \frac{Ke^{\alpha M_i}}{(t - t_i + c)^p} \quad (2)$$

ここで t_i および M_i はそれぞれ i 番目の地震の発生時

刻および規模（マグニチュード）である。パラメータは $\theta = (\mu, K, c, \alpha, p)$ の5つである。

その後、尾形は時空間への拡張を行った⁴⁾。この「時空間版 ETAS」の強度関数は次の通りである。

$$\lambda(t, x, y | \theta) = \mu(x, y) + \sum_{i: t_i < t} g_i(x, y) \frac{K}{(t - t_i + c)^p}. \quad (3)$$

$g_i(x, y)$ が i 番目の地震による余震の空間的拡がり（と余震期待数のマグニチュード依存性）を表しており、地震の震央（震源を地表面に投影した水平面内における位置）を中心とした指数減衰

$$g_i(x, y) = \exp \left[-\frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{de^{\alpha M_i}} \right] \quad (4)$$

やベキ減衰

$$g_i(x, y) = \frac{e^{\alpha M_i}}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + d]^q} \quad (5)$$

など複数の式が提案されており、当てはまりのよいものを適当な方法（例えば赤池情報量規準^{5, 6)}に基づくモデル選択）で選ぶ。ここで x_i および y_i は i 番目の地震の震央を表す。パラメータ θ は時間版 ETAS の5個に、「指数減衰」であれば d を加えた6個、「ベキ減衰」であれば d と q を加えた7個である。

3 ETAS モデルが生まれた背景

大地震の発生に伴い続発する地震（余震）の発生頻度は時間が経つにつれ次式で示すようなベキ減衰をすることが経験的に古くから知られており^{7, 8)}、現在では「大森・宇津公式」と呼ばれている。

$$\lambda(t) = \frac{K}{(t + c)^p}. \quad (6)$$

第2.1節で点過程の例として挙げた「客が訪れた時刻」と同様、地震の発生時系列も点過程と見做すことが出来る。この考え方に基づけば「大森・宇津公式」を強度関数として扱い、そのパラメータを最尤法で求め得ることを尾形は示した⁹⁾。

ところで大森・宇津公式は、余震を発生させる地震が最初の大地震（本震）のみとしたモデルである。しかし実際の余震発生時系列においては、規模（マグニチュード）の大きな余震が発生すると、その余震による余震（二次余震）が引き起こされることがある。二次余震が顕著である場合、当然ながら大森・宇津公式の実データへの適合性は著しく悪い。

こういった場合に対しては、二次余震を引き起こした（ように見える）余震に関する大森・宇津公式を足し合わせる事が考えられるが、現実的にはそれぞれの余震が二次余震を引き起こした/引き起こさなかったかを判別することは難しい。そこで尾形は「全ての余震が二次余震を励起し得る」という仮定を導入した。加えて「ある余震が励起する二次余震の期待数の多寡はその余震のマグニチュードに依存する」とも仮定し、こうして出来上がったものが ETAS モデルである。

これらの仮定は時間版 ETAS で言えば式(2)の右辺第2項に表現されている。分子にある $e^{\alpha M_i}$ が二次余震の期待数がそれらを励起する余震のマグニチュード

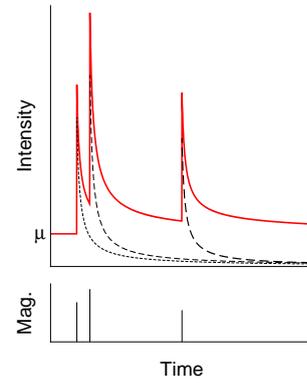


Fig. 1: 時間版 ETAS による強度関数の概念図（上図）。下図に縦線で示した地震（縦線の長さはマグニチュードに対応）各々により、黒点線（地震毎に線の太さ・種類を変えてある）で示されたような強度関数の増加と減衰が起こる。これら全てと常時地震活動（ μ ）を足し合わせたものが ETAS モデル（赤線）である。常時地震活動は余震とは関係なく独立に発生するものであり、地震活動が落ち着くにつれ、強度関数はこの値に近づいていく。

への依存性に対応し（通常は $\hat{\alpha} > 0$ となるので）マグニチュードが大きい余震ほど多くの余震を引き起こす。そして時刻 t_i を起点とするベキ減衰式（大森・宇津公式、式(6)に相当）を多数重ね合わせたものが右辺第2項全体である。なお右辺第1項の μ は余震活動とは独立に発生する定常的な地震活動（常時あるいは背景地震活動などと呼ばれる）に対応する（図1も参照）。同様に適当な空間的拡がりで大森・宇津公式を時空間的に重ね合わせたものが時空間版 ETAS である。

4 ETAS モデルによる影響

4.1 点過程解析などにおける位置付けと現状

第3章に示した通り、ETAS モデルの出発点は大地震により引き起こされる余震活動をより適切にモデル化することにあつた。このようにある事象の発生に伴い、さらなる別の事象が続発する現象は地震に限ったものではない。時間/空間/時空間的に事象が集中して発生する性質、即ち「クラスター性」は様々な種類のデータに見られるものである。クラスター性を表すための一般的な点過程モデルとして「Hawkes 過程」^{10, 11)} が以前より提唱されており、ETAS モデルはその具体例の1つと言える。

ETAS モデルが地震に関する研究で盛んに用いられるようになるにつれ、その有用性が他分野でも認識され、地球科学以外の様々な分野でも適用されるようになった。具体的には感染症伝播¹²⁾・犯罪発生¹³⁾・SNS への投稿¹⁴⁾ や株式注文の履歴¹⁵⁾・外来種拡大¹⁶⁾ といった医学・社会科学・経済学・生態学などへの分野横断的な適用事例が存在する。

図2に時間版 ETAS³⁾ と時空間版 ETAS⁴⁾ に関する論文それぞれの年ごとの被引用数を示す。両論文とも2000年代前半頃から急激に被引用数が増加しており、論文出版から20年あるいは30年以上が経過した現在でもその増加が続いていることが見てとれる。

点過程解析、特に時空間点過程解析の実データ解析の歴史はあまり長くない。その理由の1つとして、式

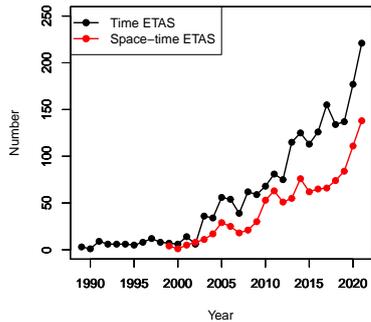


Fig. 2: 時間版 ETAS (“Time ETAS”, 黒)³⁾ および時空間版 ETAS (“Space-time ETAS”, 赤)⁴⁾ の関する論文それぞれの年ごとの被引用数 (Google Scholar による)。

(1)にある点過程に対する対数尤度関数の計算が困難であったことがある。同式第 2 項にある強度関数の積分項における積分領域 S は、空間に対して (有限の) 矩形領域を取るのが通例であり、強度関数の設定にも依るが、殆んどの場合は解析的な値を得ることが難しい。そのため S を適宜分割するなどして数値的な解を得る必要が生じる。加えて、ETAS モデル (Hawkes 過程) のような「重ね合わせ」を含む強度関数であれば、実際の計算においては式 (1) の第 1 項は「重ね合わせの和」となり、二重和を求めることになる。このように数値的な計算負荷の大きさが実際の解析における困難となっていたが、近年のコンピュータ性能の向上によりこの困難が緩和され応用が盛んとなっていった。

ETAS モデル論文の被引用数の増加は、こういった点過程解析の隆盛化に伴うものではある。但し、点過程解析における全ての論文が年々被引用数を増やしているということは勿論なく、他分野への拡がりを含めて ETAS モデル (とその論文) が点過程解析において特異な位置を占めていることは間違いない。逆に ETAS モデルという具体的な成功例の存在が点過程解析の拡大に寄与した側面もあるであろう。

Hawkes 過程の提唱者である Hawkes 自身は「(Hawkes 過程を提唱した) 動機は純粋に数学的なもの」であり「多くの人が Hawkes 過程は元々は地震の連鎖を記述するために発明されたといつて Hawkes 過程の論文を書き始めますが、これは正しくない」と昨年出版された論文¹⁷⁾ に記している。しかし、このような誤解がまかり通っている一因には、地震研究における ETAS モデルの影響が大きく、広範な分野で Hawkes 過程の先駆的な応用例として認識されていることがあると考えられる。

本来の地震研究においては、ETAS モデルは標準的な地震活動モデルとして幅広く用いられている。その理由の 1 つには、余震活動のみでなく群発地震活動のような、より複雑な地震活動を含む地震活動全般にも ETAS モデルが当てはまるからである。加えて第 2.2 節に示したように、ETAS モデルは比較的少数のパラメータで構成されており、このことは将来の事象発生予測に対する性能向上に寄与し得る。特殊な事例への適合性 (予測性能) であれば、他のモデルが優位性を示すこともあるが、様々な地域・期間における地震活

動を包括的に扱い得るという点で ETAS モデルを上回るモデルは、少なくとも現時点では存在しない。

4.2 社会への影響

実社会における実装例としては、気象庁が現在行っている余震活動予測がある。同庁では 1998 年より大森・宇津公式を強度関数として第 2.1 節末尾に記したような手法により余震の確率予測を行い発表してきた。2016 年に起きた熊本地震においても、4 月 14 日に起きたマグニチュード 6.5 の地震を本震として余震確率を公表した。ところが翌々日の 16 日にマグニチュード 7.3 の地震が発生し、これにより多数の (二次) 余震が生じたため大森・宇津公式に基づく予測は不適切なものとなった。この問題を受けて予測手法の見直しが行われた結果、大森・宇津公式だけでなく ETAS モデルも余震データへ適用し、当てはまりのよい方に基づく予測を一般社会にアナウンスしている¹⁸⁾。ETAS モデルの導入により、複雑な余震系列にも対応が可能となり、従来より現実的かつ精密な予測が達成されたと言える。

また試験的な段階ではあるが、米国地質調査所 (United States Geological Survey) ではカリフォルニア地方における地震確率予測を継続的に行っており、ETAS モデルに基づくもの (UCERF3-ETAS) が現在採用されている¹⁹⁾。

さらに ETAS モデルを導入した犯罪発生モデル¹³⁾ に基づく犯罪予測システムはロサンゼルス市警察 (Los Angeles Police Department) がカリフォルニア大学ロサンゼルス校 (University of California in Los Angeles) との協同で開発・実用化を行った。出来上がったシステムは PredPol と呼ばれ、米国の 60 都市以上とヨーロッパ (主に英国) の複数都市で使用されている^{20, 21)}。

加えて ETAS モデルは小学館の「デジタル大辞泉」に収録²²⁾ されている。このことは同モデルの重要性が社会的に認識されている 1 つの証左であることを付記する。

5 主たる貢献者

ETAS モデルの主たる貢献者は尾形良彦氏 (現 統計数理研究所 名誉教授) である。尾形氏はこの業績により 2002 年には日本統計学会賞 (授賞理由: 「地震学への応用を視野に入れた点過程解析のための様々な統計手法の開発」) を、2019 年には日本地震学会賞 (授賞理由: 「地震活動の ETAS モデルと統計地震学理論の体系化」) をそれぞれ授賞している。また研究組織としては尾形氏が長年在籍した統計数理研究所による貢献も大きい。さらに ETAS モデルに関する発表・議論を行ってきた場である学術組織として日本統計学会および日本地震学会が挙げられる。

ETAS モデルの普及と発展に貢献したのものとしては尾形氏の共同研究者や影響を受けた研究者が挙げられるが、多数にわたるため、これについては最近の解説論文²³⁾ を参照されたい。

6 価値の観点による考察

コトづくりコレクションの評価基準である「先導力」「規範力」「意味力」「解決力」の 4 点に対し、ETAS モデルがどのように評価し得るかを以下に示す。

(i) 先導力 様々なデータに見られる時間/空間/時空間的に事象が集中して発生する現象である Hawkes 過程を具現化した。この先駆性は、地球科学に限らない点過程解析における先導力を示すものと考えられる。

(ii) 規範力 地震研究においては地震活動の標準的モデルとして用いられ、正に「規範」となっている。さらに地球科学から分野横断的な広がりが起こったことは、地震に限らない様々なデータに共通して見られるクラスター性を表現する規範たり得ることを示している。

(iii) 意味力 第 4.1 節に記したように、様々なデータに見られる Hawkes 過程が「地震の連鎖を記述するために発明された」という「誤解」が流布するほど、Hawkes 過程を含む点過程解析を扱う人々の考え方に影響を与えた。

(iv) 解決力 ETAS モデルに基づく点過程モデリングの精密化が進むことにより、現実的な事象発生予測が現実的なものとなった。第 4.2 節に示した地震や犯罪の発生予測はその好例である。

7 まとめ

本稿においては ETAS モデルを紹介し、その点過程解析における影響性について示した。ETAS モデルは地震活動のクラスター的な特徴に対応するために提案されたものであった。しかし、その有効性から地球科学以外の分野でも使用されており、広範な広がりを示している。加えて地震や犯罪発生予測といった実装の実績もあり、社会的な貢献も達成されている。以上のことから同モデルをコトづくりコレクションにふさわしいと考え、推薦するものである。

なお、第 4.1 節に示したように、時空間点過程解析は発展途上にあり、今後より一層の進展が見込まれる。その進展と共に ETAS モデルがこれまで以上に多様なデータ解析に用いられ、また予測などによる社会への影響も大きくなることが予想される。

参考文献

- 1) 近江崇宏, 野村俊一, 点過程の時系列解析, 1/168, 共立出版 (2019)
- 2) Daley, D. and Vere-Jones, D., An Introduction to the Theory of Point Processes, I, 2nd ed., 1/469, Springer-Verlag (2003)
- 3) Ogata, Y., Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes, Journal of the American Statistical Association, **83**(401), 9–27 (1988)
- 4) Ogata, Y., Space-time point-process models for earthquake occurrences, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, **50**(2), 379–402 (1998)
- 5) Akaike, H., Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, Proceedings of the Second International Symposium on Information Theory (Petrov, B. N., and Caske, F., eds.), 267/281, Akademiak Kiado (1973)
- 6) Akaike, H., A new look at the statistical model identification, IEEE Transactions on Automatic Control, **19**(6), 716–723 (1974)
- 7) 大森房吉, 余震に関する報告, 震災予防調査会報告, **2**, 103–139 (1894)
- 8) Utsu, T., A statistical study on the occurrence of aftershocks, Geophysical Magazine, **30**(4), 521–605 (1961)
- 9) Ogata, Y., Estimation of the parameters in the modified Omori formula for aftershock frequencies by the maximum likelihood procedure, Journal of Physics of the Earth, **31**(2), 115–124 (1983)
- 10) Hawkes, A. G., Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes, Biometrika, **58**(1), 83–90 (1971a)
- 11) Hawkes, A. G., Point Spectra of Some Mutually Exciting Point Processes, Journal of the Royal Statistical Society. Series B, **33**(3), 438–443 (1971b)
- 12) Meyer, S. and Held, L., Power-law models for infectious disease spread, The Annals of Applied Statistics, **8**(3), 1612–1639 (2014)
- 13) Mohler, G. O., Short, M. B., Brantingham, P. J., Schoenberg F. P., and Tita, G. E., Self-exciting point process modeling of crime, Journal of the American Statistical Association, **106**(493), 100–108 (2011)
- 14) Zadeh, A. H., Sharda, R., Modeling brand post popularity dynamics in online social networks, Decision Support Systems, **65**, 59–68 (2014)
- 15) Chavez-Demoulin, V., McGill, J. A., High-frequency financial data modeling using Hawkes processes, Journal of Banking and Finance, **36**(12), 3415–3426 (2012)
- 16) Balderama, E., Schoenberg, F. P., Murray, E., and Rundel, P. W., Application of branching models in the study of invasive species, Journal of the American Statistical Association, **107**(498), 467–476 (2012)
- 17) Hawkes, A., and Chen, G., Hawkes 過程の個人史, 統計数理, **69**(2), 123–143 (2021)
- 18) 地震調査研究推進本部 地震調査委員会, 大地震後の地震活動の見通しに関する情報のあり方, https://www.jishin.go.jp/reports/research_report/yosoku_info/, 1/58 (2016)
- 19) Field, E. H., Keith, P., and Milner, K., A prototype operational earthquake loss model for California based on UCERF3-ETAS — A first look at valuation, Earthquake Spectra, **33**(4), 1279–1299 (2017)
- 20) Hardyns, W., and Rummens, A., Predictive policing as a new tool for law enforcement? Recent developments and challenges, European Journal on Criminal Policy and Research, **24**(3), 201–218 (2018)
- 21) Casey, D., Burrell, P., and Summer, N., Decision support systems in policing, European Law Enforcement Research Bulletin, **4**, 97–106 (2018)
- 22) 小学館, デジタル大辞泉, <https://kotobank.jp/word/ETAS> モデル-430318 (リンクは「デジタル大辞泉」を含むデータベース「コトバンク」のもの)
- 23) 庄建倉, 尾形良彦, 統計地震学における ETAS モデル — その進展とホークス型モデル, 統計数理, **69**(2), 145–163 (2021)